1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限的概念

1.3.2 函数极限的性质

1.3.1 函数极限的概念

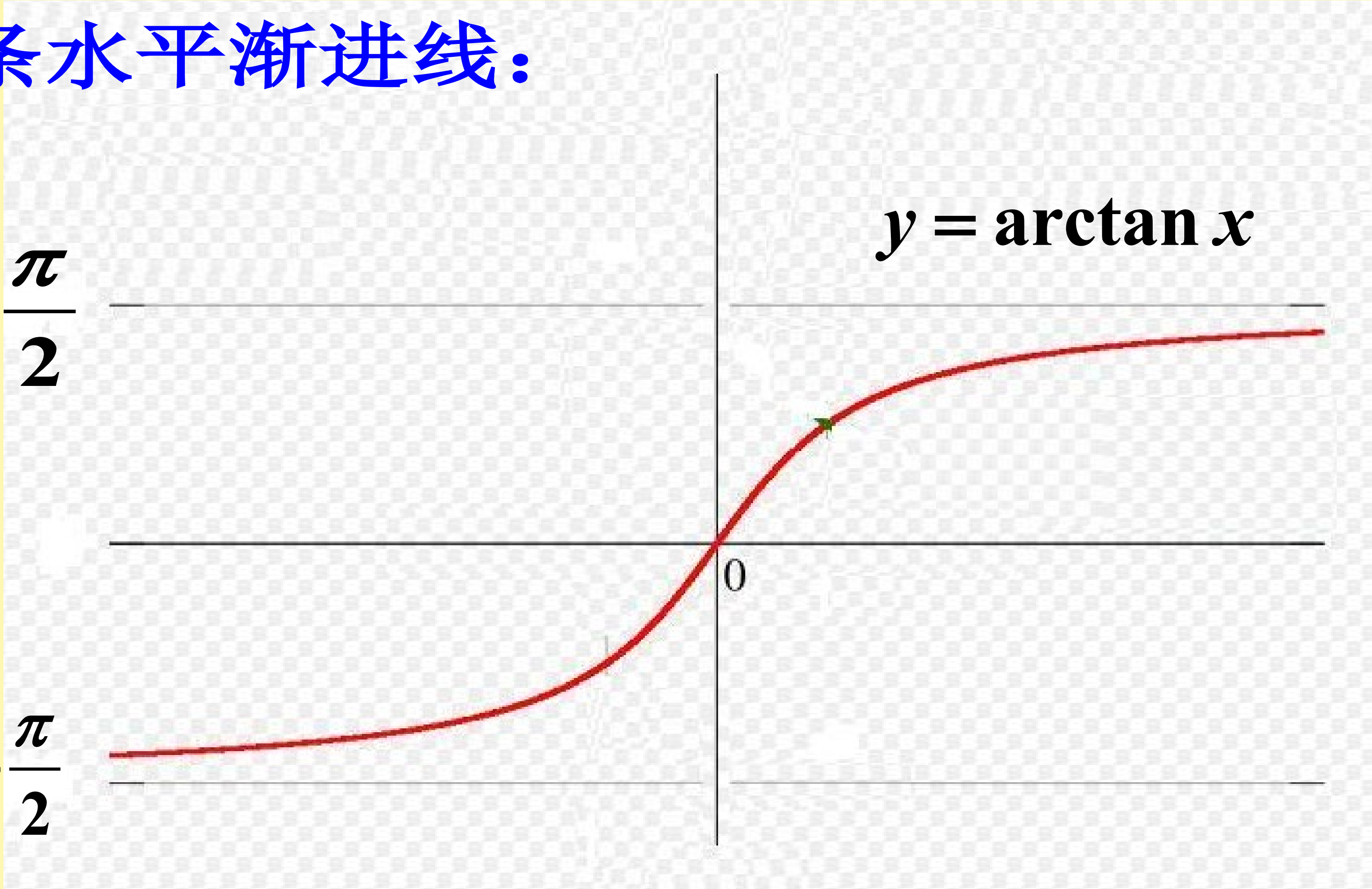
数列$\{x_n\}$可以看成是一特殊函数 $x_n = f(n)$,它的自变量 n 的变化过程只能离散地取一切自然数而无限增大。

对于一般的函数$y = f(x)$,极限问题分两种情况讨论:

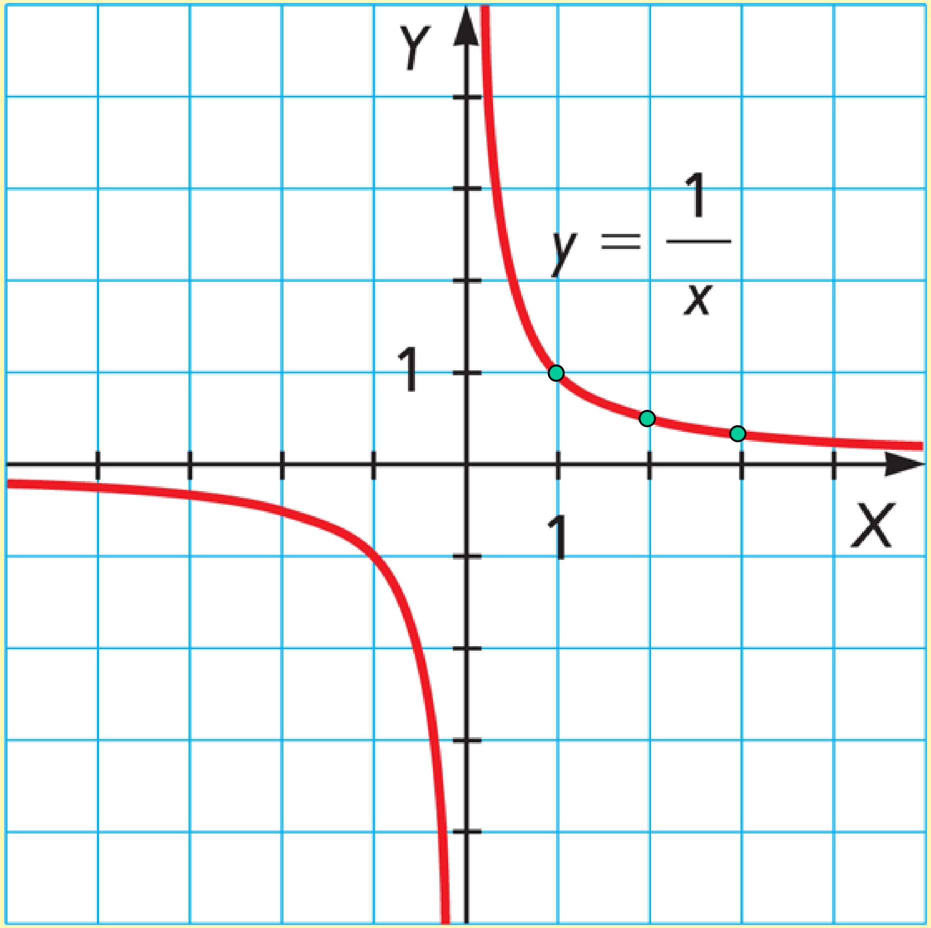
1. 自变量趋向无穷大时函数的极限

2. 自变量趋向有限值时函数的极限

两条水平渐进线：



$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{x\to 0}\arctan x=0$$



$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Leftrightarrow$$

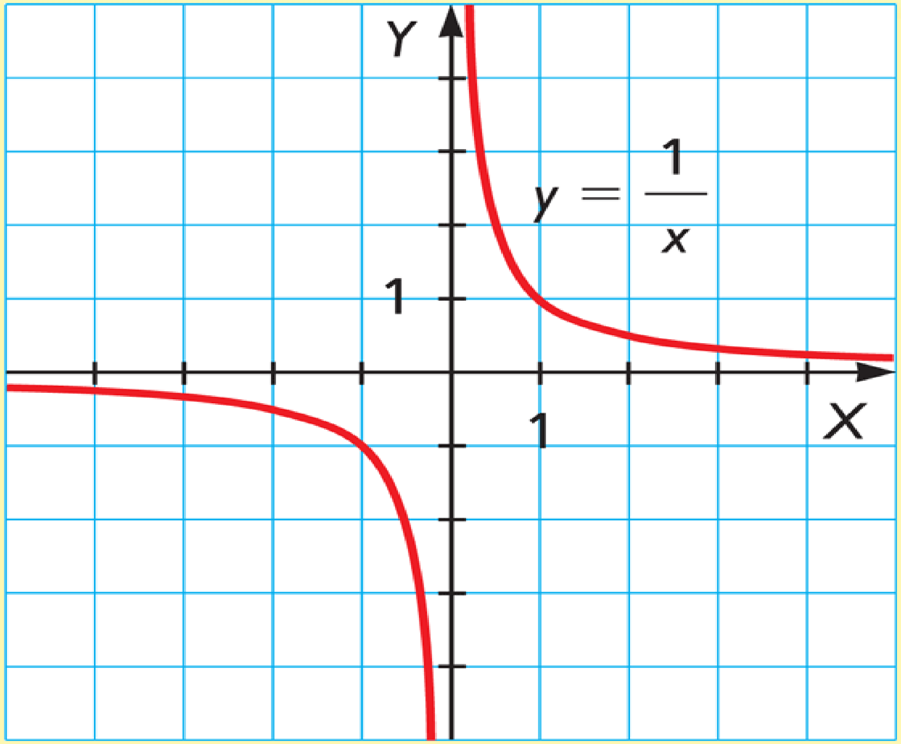
$\forall \varepsilon>0, \exists N>0,$

当$n>N$时,

恒有$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0,$ 当$x>X$时, 有$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0,$$

当$x>X$时,

恒有$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0, \text{当}x<-X\text{时,有}\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0, \text{当}|x|>X\text{时,有}\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;

$|x|>X$ 表示 $x\to\infty$ 的过程.

1. 定义:

定义 1 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当 x\to\infty)$$

"$\varepsilon - X$"定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$|x| > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2.另两种情形:

1^0. $x \to +\infty$ 情形: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2^0. $x \to -\infty$ 情形: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当$x < -X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

定理: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

定理 : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

例 (1) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在。

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ 不存在，

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在。

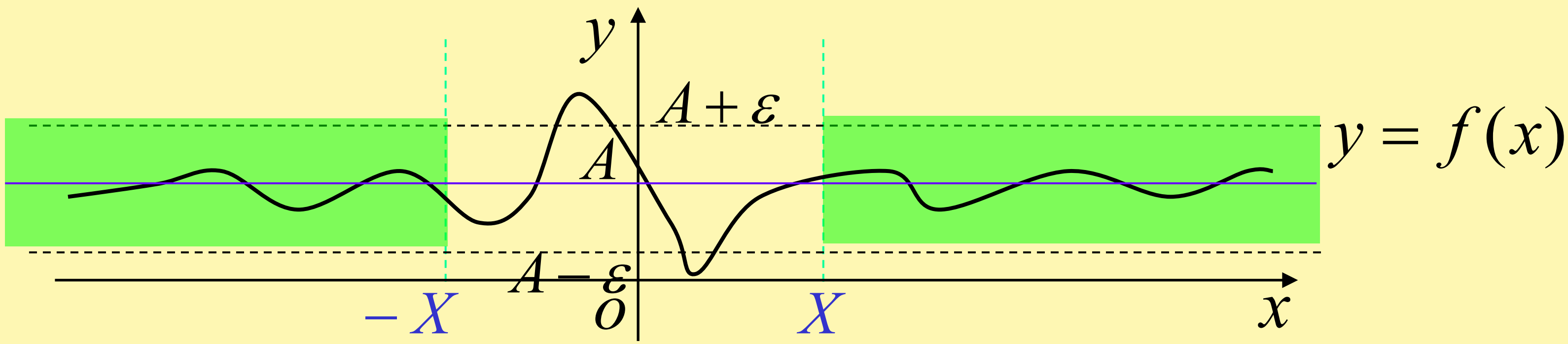
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$,使当$|x| > X$时,恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0$,使当$|x| > X$时,恒有

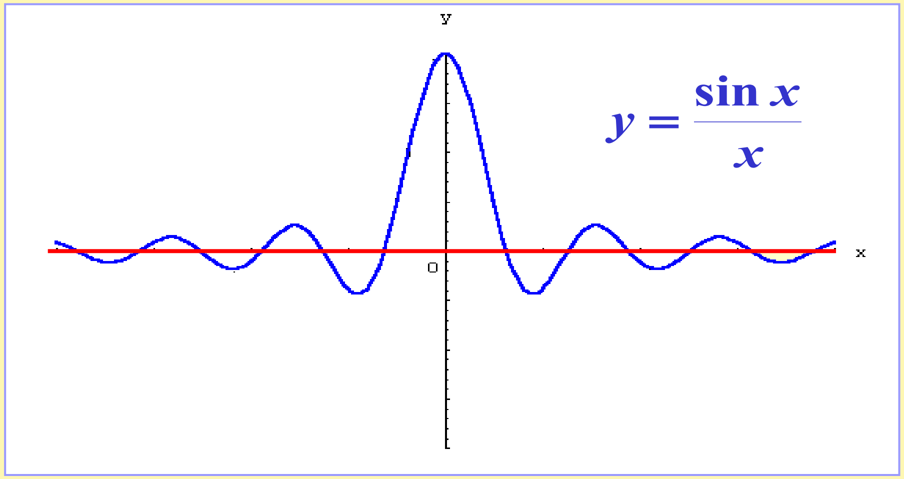
$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

3.几何解释:



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为2ε的带形区域内.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



分析 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

$\le\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon\Rightarrow|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$

证 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$ (或 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时),

则直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例如

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \therefore\ y=0\text{是}y=\frac{1}{x}\text{的一条水平渐近线。}$$

$$\because \lim_{x\to-\infty} e^{x}=0,$$

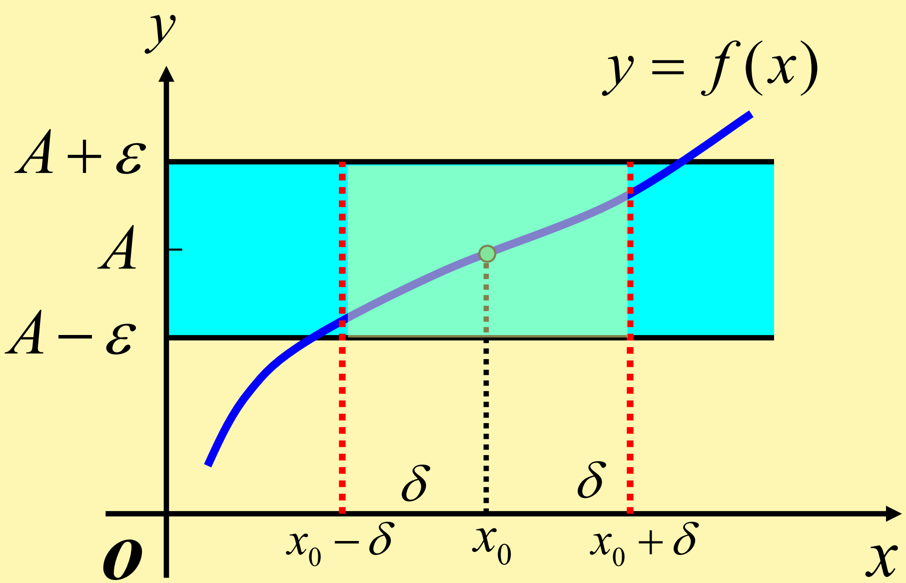
$$\therefore\ y=0\text{是}y=e^{x}\text{的一条水平渐近线。}$$

$$\because \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ y=\frac{\pi}{2}\text{和}y=-\frac{\pi}{2}\text{是}y=\arctan x\text{的水平渐近线。}$$

二、自变量趋向有限值时函数的极限

问题： 如何刻画"函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A"？

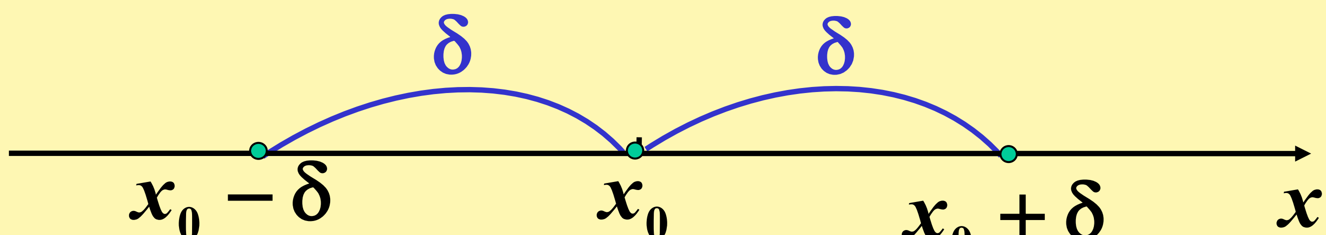


$|f(x) - A| < \varepsilon$

表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$

表示 $x \to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域，δ 体现 x 接近 x_0 程度.

1. 定义：

定义 2　如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当 x\to x_0)$$

"ε－δ"定义　$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

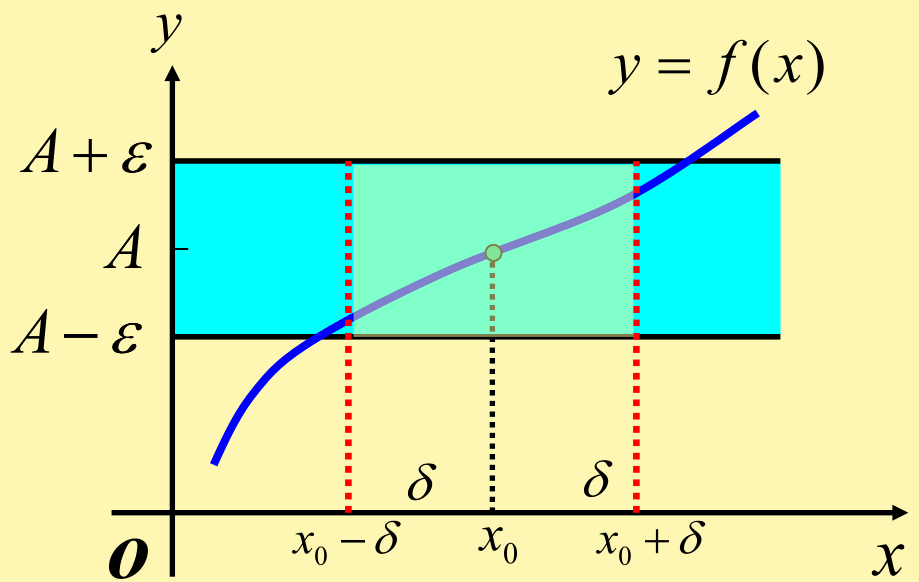
注意:

1. 函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义，取值无关;

2. δ与任意给定的正数ε有关，依赖于ε，但不是由ε唯一确定的。一般来说，ε越小,δ也越小

3.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



例2 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}=4$

证 因为$x\to 1$，$x\neq 1$, 记$f(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$

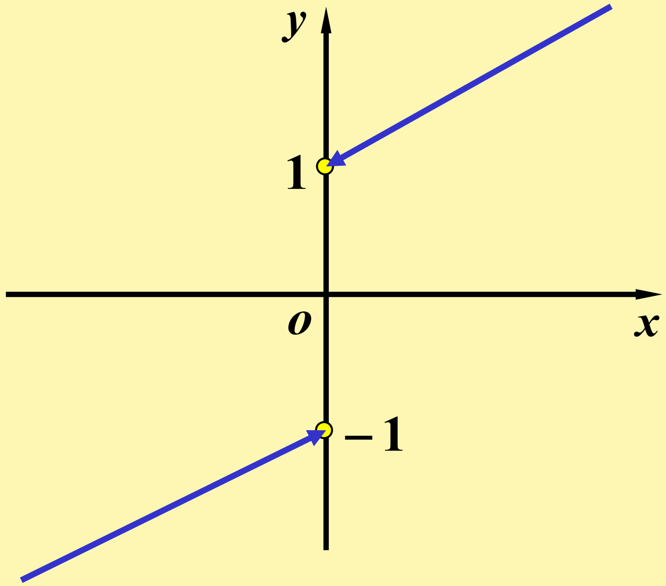
$$\left|f(x)-4\right|=\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|=\left|\frac{2(x-1)^2}{x-1}\right|=2\left|x-1\right|$$

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当$0<\left|x-1\right|<\delta$时, 恒有

$$\left|f(x)-4\right|=2\left|x-1\right|<\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}=4$ 尽管$f(x)$在 $x=1$处无定义，但并不妨碍讨论其极限。

单侧极限



设函数$y=f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，

如果$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$x_0 - \delta < x < x_0$时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称A为$f(x)$当$x \to x_0$时的左极限, 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

单侧极限

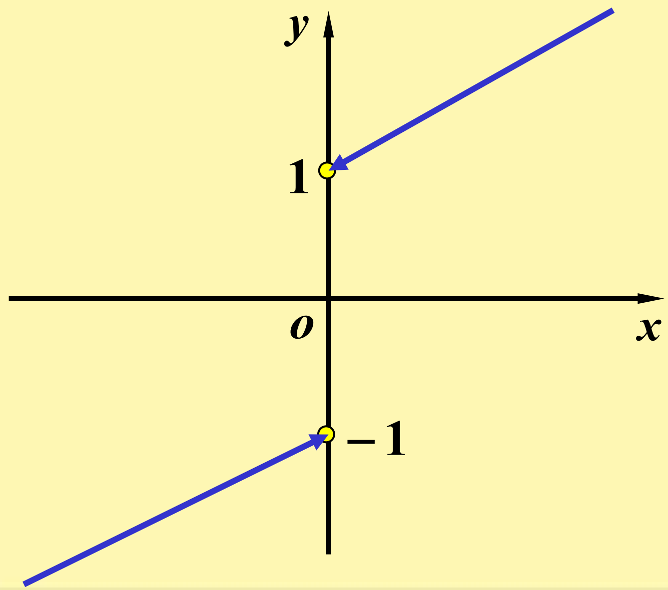
设函数$y=f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，

如果$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称A为$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

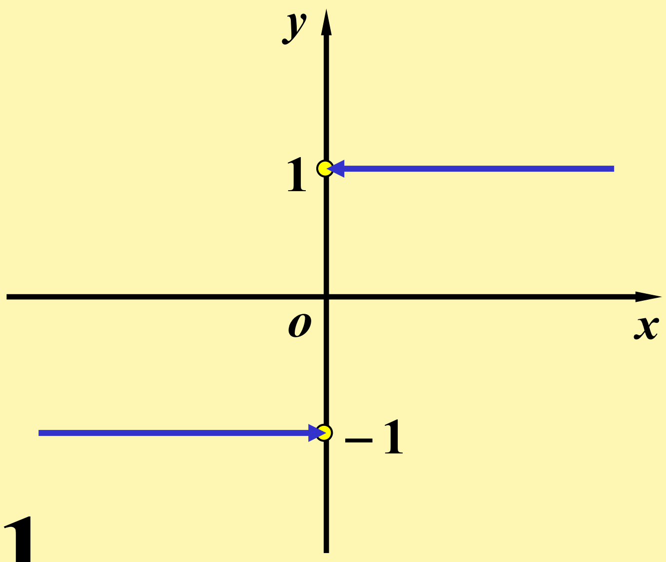


命题 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

命题 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$

问题： 如何用单侧极限说明函数极限不存在？

例6 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.



证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

左右极限存在但不相等，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

1.3.2 函数极限的性质

定理1.3.3 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在, 那么A必唯一。

定理1.3.4 (局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在常数$M>0$和$\delta>0$, 使得当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,有

$$|f(x)|\le M$$

证: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow$ 对于$\varepsilon=1, \exists\delta>0$,

当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-A|<1$.

$$\Rightarrow |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|$$

$$<1+|A|$$

定理1.3.5(局部保号性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$ (或$A < 0$),则$\exists \delta > 0$,当$x \in U^0(x_0, \delta)$时, $f(x) > 0$ (或$f(x) < 0$).

证 不妨设$A > 0$, $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$\therefore$ 对$\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时

$$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}, \quad \therefore f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0$$

即$\exists U^0(x_0, \delta)$,当$\in U^0(x_0, \delta)$时, $f(x) > 0$。

定理1.3.5(局部保号性的推论) 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$(或 $A < 0$)，则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时，

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0 \quad (\text{或 } f(x) < \frac{A}{2} < 0).$$

推论 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A(A \neq 0)$，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时，有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

推论 若当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geq 0(\leq 0)$，且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0(\leq 0)$。

推论 若当$x \in U^0(x_0, \delta)$时，$f(x) \geq 0(\leq 0)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0(\leq 0)$。

定理1.3.6（保序性） 设函数f, g在x_0的去心邻域内有$f(x) \geq g(x)$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则 $A \geq B$。

注 (1) 推论用反证法可证；保序性可直接证明，也可用推论和极限四则运算法则。以上性质与数列极限的性质类似。

$$(2)\ f(x) > 0, \lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow A > 0\ \ ?$$

例如 $f(x) = \dfrac{x^3}{x} > 0$, 但 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1} = 0.$

4.子列收敛性 (函数极限与数列极限的关系)

定义 设在过程$x \to a$(a可以是x_0, x_0^+,或x_0^-)中有数列$x_n (\neq a)$,使得$n \to \infty$时$x_n \to a$.则称数列$\{f(x_n)\}$,即$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$为函数$f(x)$当$x \to a$时的子列.

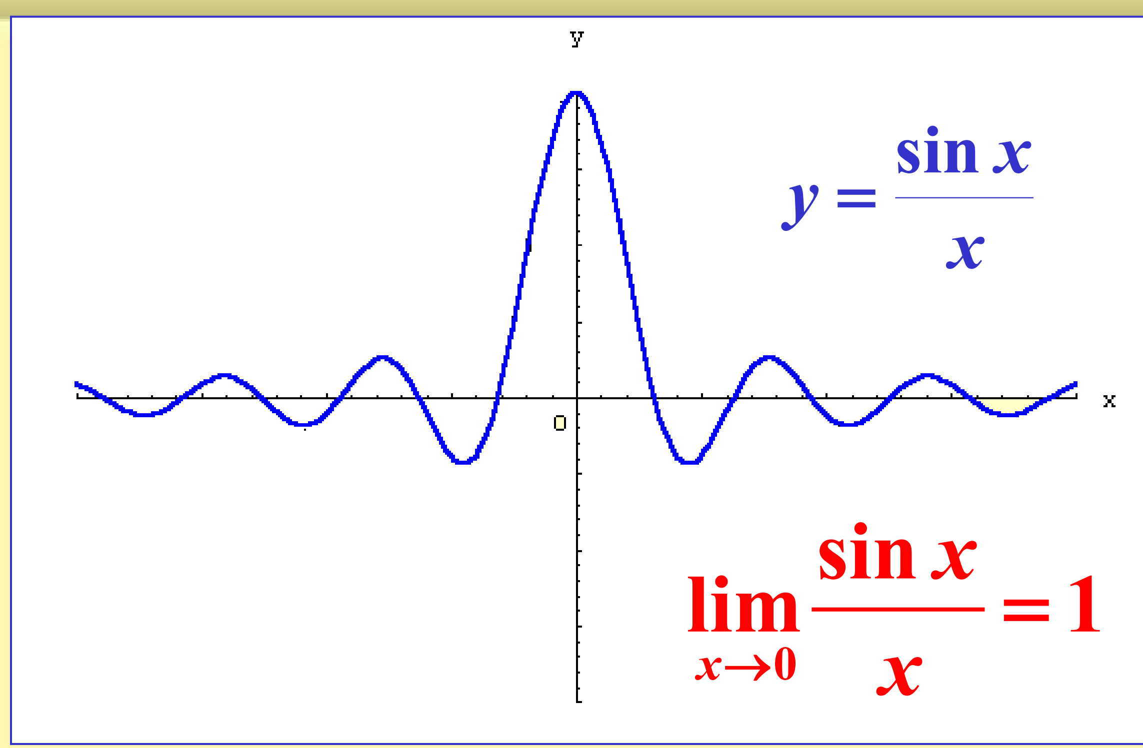
特例:取 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \to 0$, $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

定理 若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,数列$f(x_n)$是$f(x)$当$x \to a$时的一个子列,($x_n \to a$但$x_n \neq a$)则有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$$

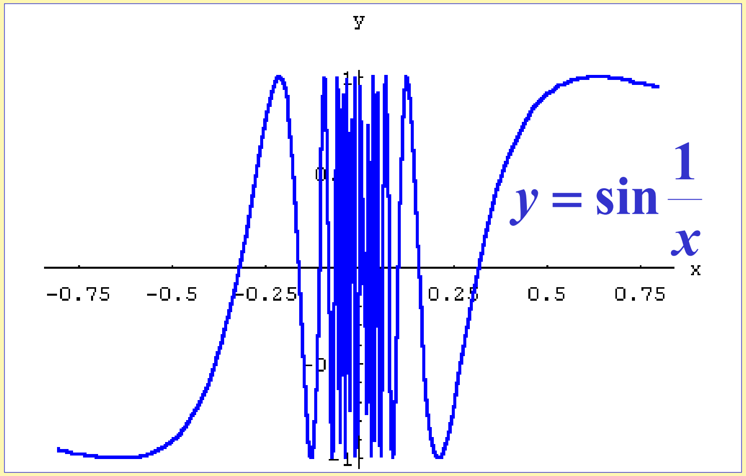


函数极限与数列极限的关系

Heine定理:　函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在,且相等.

常用来判断函数的极限不存在!

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$, $x_n\neq 0$;

取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\}$, $x_n'\neq 0$;

且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{1}{2}\pi)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

二者不相等, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.